Ogólna teoria miary
Lista 4

Zad 1. Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Sprawdzić, która z funkcji zbioru $\mu_i : 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $i = 1, ..., 7$, jest addytywna, σ-addytywna, a która jest miarą na X:

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0, & |A| < \aleph_0 \\ +\infty, & |A| \geq \aleph_0 \end{cases}, \qquad \mu_2(A) = \begin{cases} 0, & |A| \leq \aleph_0 \\ +\infty, & |A| > \aleph_0 \end{cases},$$

$$\mu_3(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}, \text{ gdzie } x_0 \in X \text{ jest ustalonym punktem}, \qquad \mu_4 \equiv const.,$$

$$\mu_5(A) = |A| + 1, \qquad \mu_6(A) = |A|, \qquad \mu_7(A) = \mu_6(A) + \mu_3(A).$$

Zad 2. Wykazać, ze funkcja zbioru $\mu : 2^{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ dana wzorem

$$a)\ \mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}, \qquad b)\ \mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{3^n},$$

jest miarą na $\mathbb{N}$. Zbadać czy zbiór wartości miary μ wypełnia cały przedział $[0, \mu(\mathbb{N})]$ i czy z tego, że $\mu(A) = \mu(B)$ wynika, że $A = B$.

Zad 3. Niech $\mu : R \to \overline{\mathbb{R}}_+$ będzie addytywną funkcją zbioru określoną na pierścieniu R. Wykazać, że

a) jeśli $\mu(\emptyset) \neq 0$, to $\mu(A) = +\infty$ dla każdego $A \in R$,

b) jeśli $A, B \in R$ są takie, że $A \subset B$ i $\mu(A) < \infty$, to $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$,

c) jeśli $A, B \in R$ są takie, że $A \subset B$, to $\mu(A) \leq \mu(B)$,

d) jeśli $A, B \in R$ i $\mu(B) = 0$, to $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) = \mu(A)$,

e) jeśli $A, B \in R$, to $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$.

Zad 4. Udowodnić, że jeśli μ jest miarą na pierścieniu $R(S)$ generowanym przez rodzinę zbiorów S taką, że $\mu(A) < \infty$ dla każdego $A \in S$, to μ jest miarą skończoną.

Zad 5. Pokazać, że jeśli μ jest miarą na σ-pierścieniu, to rodzina zbiorów o mierze skończonej tworzy pierścień, natomiast rodzina zbiorów o mierze σ-skończonej tworzy σ-pierścień.

Zad 6. Wykazać, że jeśli μ jest σ-skończoną miarą na σ-algebrze S oraz $\{A_i\}_{i \in I} \subset S$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych, to zbiór $\{i \in I : \mu(A_i) > 0\}$ jest przeliczalny.

Zad 7. Niech μ będzie miarą na pierścieniu R. Wykazać, że relacja $\sim$ określona na R warunkiem

$$A \sim B \iff \mu(A \Delta B) = 0$$

jest relacja równoważności. Ponadto pokazać, że:

a) Jeśli $A \sim B$, to $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B)$. Czy zachodzi implikacja odwrotna?

b) Jeśli μ jest miarą skończoną, to wzór

$$\rho([A], [B]) = \mu(A \Delta B),$$

gdzie A, B są reprezentantami klas abstrakcji $[A]$, $[B]$, określa metrykę na przestrzeni ilorazowej $R/\sim$.